

30 septembre 2025

Corrigé 3

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, l'ensemble V est-il un K -espace vectoriel pour la loi évidente d'addition et la multiplication scalaire donnée?

- $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in V$.
- $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in V$.
- $K = \mathbb{F}_3$, $V = K^2$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y)$ pour $\lambda \in \mathbb{F}_3$ et $(x, y) \in V$.
- $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[t] \mid f(0) = a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, et la multiplication scalaire est celle au sens usuel.
- $K = \mathbb{C}$, $V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = |z_2|\}$, et $\lambda \cdot (z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(z_1, z_2) \in V$.

Solution 1.

- Non, car, par exemple, $1 \cdot (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$ et donc la multiplication scalaire par 1 n'est pas l'application identité.
- Non, car, par exemple, $(2+1) \cdot (1, 1) = 3 \cdot (1, 1) = (27, 27)$, mais $2 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (1, 1) = (8, 8) + (1, 1) = (9, 9) \neq (27, 27)$.
- Oui. Constatons que pour tout élément $\lambda \in \mathbb{F}_3$, $\lambda^3 = \lambda$, puisque $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8 = 2 \in \mathbb{F}_3$. Donc $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^3 x, \lambda^3 y) = (\lambda x, \lambda y)$. Les axiomes d'un espace vectoriel sont faciles à vérifier.
- Si $a \neq 0$, alors ce n'est pas un espace vectoriel, car, pour $f(t) \in V$, $0 \cdot f(t)$ est le polynôme nul qui vaut 0 en 0, donc n'appartient pas à V .
Si $a = 0$, c'est un espace vectoriel. En effet, $0 \in V$ donc V n'est pas vide; pour $f(t), g(t) \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(t) + g(t)$ et $\lambda \cdot f(t)$ valent 0 en 0, donc V est stable pour les deux lois externe et interne. Le critère des sous-espaces implique que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[t]$, donc il est bien un espace vectoriel.
- Non, car, par exemple, $(1, -1) \in V$, $(i, 1) \in V$, mais $(1, -1) + (i, 1) = (1+i, 0) \notin V$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} vers lui-même. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

- L'ensemble des fonctions qui sont continues sur l'intervalle $]0, 1[$.
- L'ensemble des fonctions qui s'annulent sur tout l'intervalle $[0, 1]$.
- L'ensemble des fonctions continues valant 1 en 0.
- L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x+2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 2. Tout d'abord on note que chacun des ensembles donnés est non vide.

- a) Oui. En effet, notons V ce sous-ensemble. Si $f, g \in V$, alors $f + g$ est encore continue sur l'intervalle $]0, 1[$ et donc $f + g \in V$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf est encore continue sur l'intervalle $]0, 1[$ et $\lambda f \in V$. Cela montre que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- b) Oui. La preuve est similaire à celle de a).
- c) Non, si f est une telle fonction, alors $2f$ vaut 2 en 0 et n'appartient pas à ce sous-ensemble.
- d) Oui. La preuve est similaire à celle de a).

Exercice 3.

- (a) Soient v_1, v_2 deux vecteurs d'un \mathbb{F}_3 -espace vectoriel. On définit trois sous-espaces $V_1 = \text{Vect}(v_1, v_2)$, $V_2 = \text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2)$ et $V_3 = \text{Vect}(v_1 + 2v_2, 2v_1 + v_2)$. Montrer que $V_1 = V_2$. Est-ce que $V_3 = V_1$?
- (b) Dans le \mathbb{C} -espace vectoriel $M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$, lesquels des sous-espaces suivants sont égaux?

$$W = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i-1 & 2i & 2i \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \right);$$

$$U = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i-1 & 2i & 2i \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \right);$$

$$Z = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \right).$$

Solution 3.

- (a) Comme $v_1 + 2v_2 \in V_1 = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $v_2 \in V_1$, on a que $V_2 \subset V_1$. Un argument similaire montre que $V_3 \subset V_1$.
Réciproquement, $v_1 = (v_1 + 2v_2) - 2v_2 \in V_2 = \text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2)$ et $v_2 \in V_2$, on obtient donc $V_1 = \text{Vect}(v_1, v_2) \subset V_2$ et $V_1 = V_2$.
Bien que $V_3 \subset V_1$, $V_3 \neq V_1$ en général, car $-(v_1 + 2v_2) = -v_1 - 2v_2 = 2v_1 + v_2$ et donc $V_3 = \text{Vect}(2v_1 + v_2)$. Si par exemple $v_1 = v_2 \neq 0$, alors $2v_1 + v_2 = 3v_1 = 0$, donc $V_3 = \{0\}$, mais $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_1) \neq \{0\}$.
- (b) On montre que $W = U \neq Z$. Tout d'abord, $Z \neq U$ car il n'existe aucun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i-1 & 2i & 2i \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Aussi on note que $\begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -1 & i & 1 \end{pmatrix}$, donc $U \subseteq W$. Il reste à montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des deux matrices données dans la définition de U :

on résout l'équation matricielle $\alpha \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ -i & -1 & i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i-1 & 2i & 2i \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On compare les composantes (1,1) et (1,2) des matrices et on trouve que $\alpha = -1$ et $\beta = -i$ et ensuite on vérifie que l'égalité est ainsi satisfaite, ce qui montre que $W = U$.

Exercice 4. Soit K un corps et $a \in K$. Considérons l'application d'évaluation en a

$$ev_a : K[x] \rightarrow K.$$

Comme $K[x]$ est un K -espace vectoriel, $(K[x], +)$ est un groupe abélien, et comme K est un corps $(K, +)$ est aussi un groupe abélien. L'application ev_a est un morphisme de groupes. Montrer que le noyau de ev_a est un sous-espace vectoriel de $K[x]$.

Solution 4. Posons $U = \ker(ev_a) = \{f \in K[x] \mid ev_a(f) = f(a) = 0\}$. On note que le polynôme $f(x) = x - a$ appartient à U et donc $U \neq \emptyset$.

Soient maintenant $f, g \in U$ et $\lambda \in K$. On a $f(a) = 0 = g(a)$. Et par conséquent, en remarquant que ev_a est une application linéaire, $ev_a(\lambda f + g) = \lambda f(a) + g(a) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$. Donc $\lambda f + g \in U$. Donc U est un sous-espace vectoriel de $K[x]$.